Prof. Dr. M. Günther
K. Gausling, M.Sc.
C. Hendricks, M.Sc.
Sommersemester 2014

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C – Mathematik und Naturwissenschaften
Angewandte Mathematik / Numerische Analysis

Einführung in die numerische Mathematik

Aufgabenblatt 11 - Gauß-Quadratur

Lösungen

Bitte beachten Sie, dass die Punkte der Hausaufgabe für die Berechnung der Bonuspunkte relevant sind.

Präsenzaufgabe 1: *Gauß-Quadratur*

Bestimmen Sie das Integral $\int_2^4 x^{-1}dx$ mittels 2-Punkt-Gauß-Quadratur und berechnen Sie den Fehler der numerischen Approximation.
Hinweis: Nutzen Sie eine lineare Transformation, um das Intervall $[2,4]$ *in das Intervall* $[-1,1]$ *zu überführen.*

Lösungsvorschlag:

Wir nutzen die Transformation $x(u) = \frac{b-a}{2}u + \frac{b+a}{2}$, um das Integrationsgebiet auf das Intervall $[-1,1]$ zu überführen. Die 2-Punkt-Gauß-Quadratur nutzt die Stützstellen $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, sowie die Gewichte $g_0 = g_1 = 1$. Die Quadraturformel lautet mit $f(x) := x^{-1}$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 f(\tfrac{b-a}{2}u + \tfrac{b+a}{2})du = \int_{-1}^1 f(u+3)du \approx \frac{b-a}{2}\big(g_0\, f(x(x_0)) + g_1\, f(x(x_1))\big)$$
$$= f(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}+3) + f(\tfrac{1}{\sqrt{3}}+3) = 0.4127712... + 0.2795365... = 0.69230769...$$

Wir berechnen nun den Fehler mittels Satz 7.3. Demnach gilt

$$\int_{-1}^1 f(x)dx - \sum_{i=0}^n g_i f(x_i) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\int_{-1}^1 L_{n+1}(x)^2dx.$$

Für $n = 1$ erhalten wir

$$\left|\int_2^4 f(x)dx - \big(f(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}+3) + f(\tfrac{1}{\sqrt{3}}+3)\big)\right| \le \frac{\max_{\{\xi\in[2,4]\}}|f^{(4)}(\xi)|}{4!}\int_{-1}^1 L_2(x)^2dx$$

Es gilt $f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}$ und $\max_{\{\xi\in[2,4]\}}\left|f^{(4)}(\xi)\right| = \frac{24}{2^5} = \frac{3}{4}$, sowie

$$\int_{-1}^1 L_2(x)^2dx = \int_{-1}^1 (x^2-1/3)^2dx = \frac{8}{45}.$$

Für den Fehler folgt damit

$$\left|\int_2^4 f(x)dx - (f(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}+3) + f(\tfrac{1}{\sqrt{3}}+3))\right| \le \frac{3}{4}\frac{1}{24}\frac{8}{45} = \frac{1}{180} = 0.00\bar{5}.$$

Zum Vergleich berechnen wir auch noch den genauen Fehler

$$\int_2^4 f(x)dx - (f(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}+3) + f(\tfrac{1}{\sqrt{3}}+3)) = [\log(u+3)]_{-1}^{1} - 0.69230769... = 0.000839488...$$

Präsenzaufgabe 2: *Gauß-Quadratur*

Das gewichtete Integral

$$I(f) := \int_{-1}^{1} x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$$

für $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ soll mittels der Formel

$$J(f) := \alpha \cdot f(\hat{x}) + \beta \cdot f(-\hat{x})$$

mit $0 < \hat{x} \leq 1$ und Gewichten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ approximiert werden.

a) Bestimmen Sie $\hat{x}, \alpha, \beta$ derart, dass die Approximation exakt ist für alle Polynome vom Grad höchstens 2.

b) Was ist das maximale $k \in \mathbb{N}$, für das die Approximation mit den Parametern aus Aufgabenteil (a) noch exakt für alle Polynome vom Grad höchstens k ist?

c) Kann der Wert k aus Aufgabenteil (b) erhöht werden, indem man eine andere Formel $\tilde{J}(f) = \tilde{\alpha} \cdot f(\tilde{x}_1) + \tilde{\beta} \cdot f(\tilde{x}_2)$ mit neuen Knoten und Gewichten verwendet?
Begründen Sie Ihre Aussage.

Lösungsvorschlag:

a) Wegen der Linearität der Abbildungen I und J genügt es, die Aussage für Basispolynome zu betrachten. Wir verwenden die Monome. Die exakten Integralwerte dieser Basispolynome sind

$$I(1) = \int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}, \qquad I(x) = \int_{-1}^{1} x^3\,\mathrm{d}x = 0, \qquad I(x^2) = \int_{-1}^{1} x^4\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}.$$

Die Quadratur-Formel liefert demgegenüber

$$\begin{aligned} J(1) &= \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 &&= \alpha + \beta, \\ J(x) &= \alpha\hat{x} + \beta(-\hat{x}) &&= (\alpha - \beta)\hat{x}, \\ J(x^2) &= \alpha\hat{x}^2 + \beta(-\hat{x})^2 &&= (\alpha + \beta)\hat{x}^2. \end{aligned}$$

Die Forderung $I(x^q) = J(x^q)$ für $q = 0, 1, 2$ erzeugt damit das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \tfrac{2}{3} \\ (\alpha - \beta)\hat{x} &= 0 \\ (\alpha + \beta)\hat{x}^2 &= \tfrac{2}{5}. \end{aligned}$$

Wegen $\hat{x} > 0$ liefert die zweite Gleichung bei Division durch $\hat{x}$ sofort

$$\alpha = \beta.$$

Dies in die erste Gleichung eingesetzt ergibt

$$\alpha = \beta = \frac{1}{3}.$$

Die Gewichte in die dritte Gleichung eingesetzt liefert mit $\hat{x} > 0$

$$\frac{2}{3}\hat{x}^2 = \frac{2}{5} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{x}^2 = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad \hat{x} = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Damit sind die Parameter eindeutig bestimmt.

b) Aus Aufgabenteil (a) folgt, dass Polynome vom Grad bis 2 exakt quadriert werden. Um eine eventuelle höhere Ordnung nachzuprüfen betrachten wir wieder die Monom-Basis. Es folgt

$$I(x^3) = \int_{-1}^{1} x^5 \, \mathrm{d}x = 0$$

und

$$J(x^3) = \frac{1}{3}\left(\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^3 + \sqrt{\frac{3}{5}}^3\right) = 0.$$

Jedoch gilt

$$I(x^4) = \int_{-1}^{1} x^6 \, \mathrm{d}x = \frac{2}{7}$$

aber

$$J(x^4) = \frac{1}{3}\left(\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^4 + \sqrt{\frac{3}{5}}^4\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3^2}{5^2} = \frac{6}{25}.$$

Damit ist der maximale Grad $k = 3$ für den Polynome noch exakt quadriert werden. Die Ordnung der Quadraturformel ist daher 4.

c) Bei einer Quadraturformel mit n Knoten kann höchstens die Ordnung $2n$ erreicht werden. Laut Aufgabenteil (b) ist die betrachtete Quadraturformel wegen $n = 2$ bereits optimal. Es handelt sich also um die eindeutige Gauß-Quadratur zu der nichtnegativen Gewichtsfunktion $w(x) \equiv x^2$.

Hausaufgabe 1: *Gauß-Legendre-Quadratur* (10 Punkte)

Für die Legendre-Polynome gilt die Rekursionsformel

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)(n = 1, 2, \ldots; P_0 = 1; P_1 = x).$$

a) Bestimmen Sie die Legendre-Polynome bis zu einem Grad $n = 6$. Berechnen Sie anschließend die Stützstellen und Gewichte der Gauß-Legendre-Quadratur, die benötigt werden, um Polynome bis zu einem maximalen Polynomgrad von $N = 5$ exakt zu integrieren.

b) Gegeben ist das Polynom $p(x) = 4x^3 - 2x^2 + x + 6$. Berechnen Sie unter Verwendung der Gauß-Legendre-Quadratur mittels einer geeigneten Variablentransformation das Integral

$$I[f] = \int_{0}^{1} p(x)dx \tag{11.1}$$

exakt. Verifizieren Sie Ihr Ergebnis!

Lösungsvorschlag:

a) Die Rekursionsformel liefert für die ersten sieben Legendre-Polynome in $[-1,1]$:

$$P_0(x)=1, P_1(x)=x, P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1), P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),$$

$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3), P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x), P_6(x)=\frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5).$$

Die Gauß-Quadratur stimmt für polynomiale Funktionen, deren Grad maximal $2n-1$ ist, mit dem Wert des Integrals exakt überein. Die gesuchten Stützstellen sind somit die Nullstellen von $P_3(x)$.

$$x_1=-\sqrt{\tfrac{3}{5}}\approx -0.774596669241, x_2=0, x_3=\sqrt{\tfrac{3}{5}}\approx 0.774596669241.$$

Für die Gewichte α_i gilt:

$$\alpha_i=\int_a^b w(x)\prod_{j=1,j\neq i}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\mathrm{d}x \quad i=1,\ldots,n. \tag{11.2}$$

Die gesuchten Gewichte ergeben sich somit zu:

$$\alpha_1=\tfrac{5}{9}\approx 0.555555555556, \alpha_2=\tfrac{8}{9}\approx 0.888888888889, \alpha_3=\tfrac{5}{9}\approx 0.555555555556.$$

b) MATLAB liefert (bei Verwendung der Symbolic Math Toolbox):

$$I[f]=\int\limits_0^1 p(x)\ dx=\frac{41}{6}. \tag{11.3}$$

Um eine polynomiale Funktion dritten Grades mittels Gauß-Quadratur exakt zu berechnen, nutzen wir für die Stützstellen und Gewichte:

$$x_1=-\sqrt{\tfrac{1}{3}}\approx -0.57735026919, x_2=\sqrt{\tfrac{1}{3}}\approx 0.57735026919,$$

$$\alpha_1=\tfrac{5}{9}\approx 1, \alpha_2=\tfrac{8}{9}\approx 1.$$

Für die Variablentransformation auf das Intervall $[0,1]$ nutzen wir $\tilde{x}_i=\frac{1}{2}x_i+\frac{1}{2}$. Mit der Gewichtsfunktion $\omega(x)=\frac{1}{2}$ gilt dann:

$$I[f]=\int\limits_0^1 p(x)\ dx=\omega(x)\sum_{i=1}^{2}p(\tilde{x}_i)=\frac{1}{2}(\underbrace{4\tilde{x}_1^3-2\tilde{x}_1^2+\tilde{x}_1+6}_{p(\tilde{x}_1)}+\underbrace{4\tilde{x}_2^3-2\tilde{x}_2^2+\tilde{x}_2+6}_{p(\tilde{x}_2)})$$

Hausaufgabe 2: *Legendre-Polynome* (10 Punkte)

Die Legendre-Polynome $P_n\in\mathbb{P}_n$ sind durch

$$P_n(x):=\frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

definiert. Zeige:

1. $\langle P_n, P_m \rangle = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$ (mit $\langle u, v\rangle = \int_{-1}^{1} u(x)v(x)\ dx$),
   Hinweis: n-malige partielle Integration.

2. $P_n(1) = 1, \qquad P_n(-1) = (-1)^n.$
   Hinweis: Leibniz-Regel: Seien f,g, zwei n mal differenzierbare Funktionen, so gilt $\frac{d^n}{dx^n} f\, g = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

Lösungsvorschlag:

1. O.B.d.A. sei $m \le n$

$$\begin{aligned}\langle P_n, P_m\rangle &= \int_{-1}^{1} \tfrac{1}{n!2^n}\tfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \tfrac{1}{m!2^m}\tfrac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m dx \\ &= \tfrac{1}{n!2^n}\tfrac{1}{m!2^m}\int_{-1}^{1}\tfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\tfrac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m dx\end{aligned}$$

Einmalige partielle Integration liefert unter Vernachlässigung der Terme vor dem Integral

$$= \left[\tfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\tfrac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\tfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\tfrac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^2-1)^m dx$$

Die Funktion $(x^2-1)^n$ besitzt eine n-fache Nullstelle bei ± 1. Die ersten $n-1$ Ableitungen verschwinden an den Nullstellen ± 1 ebenfalls. Daher erhalten wir

$$= -\int_{-1}^{1}\tfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\tfrac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^2-1)^m dx.$$

Wenden wir die partielle Integration weitere $n-1$ mal an (also insgesamt n mal), ergibt sich die folgende Darstellung

$$= (-1)^n\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\tfrac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}(x^2-1)^m dx.$$

Die Funktion $(x^2-1)^m$ ist ein Polynom von Grad $2m$. Gilt $m < n$ so ist $m+n > 2m$ und $\frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}(x^2-1)^m = 0$, woraus $\langle P_n, P_m\rangle = 0$ für $n \neq m$ folgt. Wir betrachten nun den Fall $m = n$ und erhalten daher

$$= (-1)^n\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\tfrac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n dx.$$

Da $\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n = (2n)!$ ergibt sich

$$\begin{aligned}&= (-1)^n(2n)!\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx \\ &= (-1)^n(2n)!\int_{-1}^{1}(x-1)^n(x+1)^n dx.\end{aligned}$$

Mittels partieller Integration erhält man

$$= (-1)^n (2n)! \left(\left[\frac{1}{n+1} (x+1)^{n+1} (x-1)^n \right]_{-1}^{1} - \tfrac{n}{n+1} \int_{-1}^{1} (x-1)^{n-1} (x+1)^{n+1} dx \right).$$

Der erste Term fällt weg und weitere $n-1$ malige partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} &= (-1)^n (2n)! (-1)^n \tfrac{n!}{(2n)(2n-1)\dots(n+2)(n+1)} \int_{-1}^{1} (x+1)^{2n} dx \\ &= (n!)^2 \left[\tfrac{1}{2n+1} (x+1)^{2n+1} \right]_{-1}^{1} \\ &= (n!)^2 \frac{2^{2n+1}}{2n+1}. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\langle P_n, P_n \rangle = \tfrac{1}{n!2^n} \tfrac{1}{n!2^n} (n!)^2 \frac{2^{2n+1}}{2n+1} = \frac{2}{2n+1}$$

2. z.z. $P_n(1) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \big((x^2-1)^n \big) \\ &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \big((x-1)^n (x+1)^n \big) \\ &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k} \big((x-1)^n \big) \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} \big((x+1)^n \big) \end{aligned}$$

Für $x = 1$ werden alle Summanden bis auf $k = n$ Null. Daher erhält man

$$P_n(1) = \frac{1}{2^n n!} n! 2^n = 1.$$

Für $x = -1$ werden alle Summanden bis auf $k = 0$ Null. Daher erhält man

$$P_n(1) = \frac{1}{2^n n!} n! (-2)^n = (-1)^n.$$